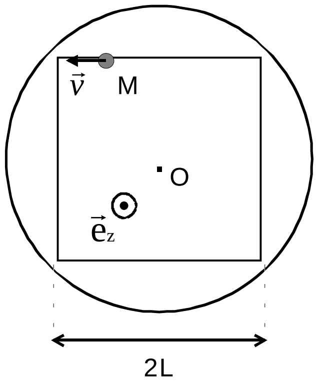
-EXERCICE 17.7-

• ENONCE :

« Mobile sur un plateau tournant »



Un jouet est constitué d'un plateau circulaire pouvant tourner sans frottements autour d'un axe vertical Oz.
Une piste carrée (de côté 2L) est aménagée sur le plateau; un mobile M, assimilé à un point matériel de masse m,peut se déplacer sur cette piste avec une vitesse v quelconque.
Initialement, tout est immobile.
A t=0, le mobile démarre et fait une fois le tour du carré.

De quel angle α le plateau a-t-il tourné autour de son axe Oz ?

Rq : le moment d'inertie du plateau autour de son axe sera simplement noté J .

• CORRIGE :

« Mobile sur un plateau tournant »

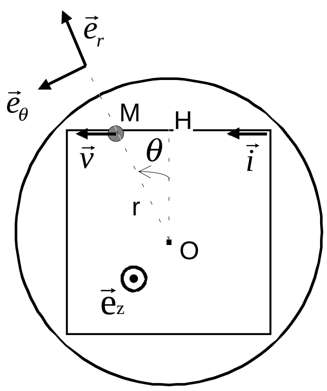
1) **Analyse du problème :**

• Puisque le mobile peut avancer sur la piste, il y a des frottements entre la piste et lui : ces frottements n'étant pas modélisés par l'énoncé, il faut en faire des forces **intérieures** $\Rightarrow$ nous prendrons pour système {plateau + mobile}. Ce système n'étant pas un solide, les forces intérieures peuvent travailler (on ne sait pas s'il y a du glissement ou non) $\Rightarrow$ on ne pourra appliquer un théorème énergétique.

• On demande un angle de rotation, le TMC s'impose : la liaison étant sans frottements, on utilisera le **TMC scalaire**. Or, les poids étant parallèles à l'axe de rotation, les moments projetés sur cet axe seront **nuls** $\Rightarrow$ il y a **conservation du moment cinétique scalaire** du système.

• On n'oubliera pas de préciser le **référentiel** d'étude, qui sera le **sol** : on remarquera que la vitesse $\vec{v}$ (en ce qui concerne le mobile) est donnée par rapport au plateau.

2) **Résolution du problème :**



Nous raisonnerons sur la figure ci-contre.
Le sens + des rotations est le sens trigonométrique.
On ne confondra pas l'angle dont tourne le mobile M par rapport au plateau, avec l'angle dont tourne le plateau par rapport au sol.

• Nous allons donc exploiter la conservation du moment cinétique scalaire, soit : $\sigma_z(t) = cste = 0$, puisque tout est immobile à t=0.

Plateau : $\sigma_{plateau} = J\dot{\alpha}$ ($\dot{\alpha}$ est la vitesse de rotation du plateau/sol)

Mobile : $\vec{\sigma}_{mob/sol} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{mob/sol}$;avec : $\vec{v}_{mob/sol} = \vec{v}_{mob/plateau} + \vec{v}_e$, où $\vec{v}_e$ (vitesse d'entraînement) est la vitesse d'un point P coïncidant avec M, mais appartenant au plateau : P décrit un cercle de rayon r, à la vitesse angulaire $\dot{\alpha} \Rightarrow \vec{v}_e = r\dot{\alpha}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{v}_{mob/sol} = v\vec{i} + r\dot{\alpha}\vec{e}_\theta = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; on a alors :

$$\vec{\sigma}_{mob/sol} = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\alpha}\vec{e}_\theta) = mr^2(\dot{\theta}+\dot{\alpha})\vec{e}_z \quad \text{ceci pour } \theta \in [-\pi/4, \pi/4]$$

Par ailleurs : $r\cos\theta = L$ (ceci pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$) $\Rightarrow \sigma_z = 0 = J\dot{\alpha} + \dfrac{mL^2}{\cos^2(\theta)}(\dot{\alpha}+\dot{\theta}) \Rightarrow$

$$\dot{\alpha}\left(1+\frac{J}{mL^2}\cos^2\theta\right) = -\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\alpha = -\frac{d\theta}{1+A\cos^2(\theta)}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{A = \frac{J}{mL^2}}$$

• On constate que les variations de l'angle α ne dépendent que de celles de l'angle θ, et sont indépendantes de la vitesse du mobile (le temps mis pour faire un tour dépend bien sûr de cette vitesse). Nous nous bornerons à intégrer θ de 0 à $\pi/4$ et nous multiplierons le résultat par 8.

Il vient donc : $\alpha = \int_0^{\alpha} d\alpha = -8 \times \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1 + A\cos^2(\theta)}$

- $\frac{d\theta}{1 + A\cos^2(\theta)}$ est invariant pour $\theta \to \pi + \theta$ $\Rightarrow$ on pose : $\tan\theta = t$ $\Rightarrow$ $\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{1 + t^2}$;

par ailleurs : $dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ $\Rightarrow$ $d\theta = \frac{dt}{1 + t^2}$ $\Rightarrow$ $d\alpha = -\frac{dt}{1 + A + t^2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + A}} \times \frac{du}{1 + u^2}$, avec : $u = \frac{t}{\sqrt{1 + A}}$

D'où : $\alpha = -\frac{8}{\sqrt{1 + A}} \times \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+A}}} \frac{du}{1 + u^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = -\frac{8}{\sqrt{1 + A}} \times \mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{\sqrt{1 + A}})}$ avec : $\boxed{A = \frac{J}{mL^2}}$